Sciences Po
Option Mathématiques

Epreuve 2015
Corrigé

Problème

Partie A

1) Notons u_n le prix en dollar de l'once d'or au 1er janvier de l'année $2006+n$. D'après les données de l'énoncé, on a donc : $u_0 = 500\$$ et $u_7 = 1\,700\$$. On considère que l'augmentation annuelle moyenne de ce prix est de 19%. On peut donc modéliser la situation en supposant que la suite (u_n) est une suite géométrique de raison $q = 1{,}19$ (une augmentation de 19% équivaut à une multiplication par 1,19).
On pourrait alors écrire, pour tout entier naturel n :
   - $u_n = u_0 \times q^n = 500 \times 1{,}19^n$.
   - $u_n = u_7 \times q^{n-7} = 1\,700 \times 1{,}19^{n-7}$

   « Malheureusement », les « 19% » mentionnés dans l'énoncé ne sont qu'une valeur approchée. Ainsi, on a : $500 \times 1{,}19^7 \neq 1\,700$. En toute rigueur, on ne peut donc simultanément retenir les deux égalités ci-dessus.

   Dans cette question, on cherche la plus petite valeur de n telle que $u_n > 5\ 000$. D'après ce qui précède, on peut donc résoudre l'une ou l'autre des deux inéquations :

$$u_n = 500 \times 1{,}19^n > 5\,000 \text{ ou } u_n = 1\,700 \times 1{,}19^{n-7} > 5\,000$$

   On a :

$$u_n = 500 \times 1{,}19^n > 5\,000 \Leftrightarrow 1{,}19^n > \frac{5\,000}{500} = 10 \Leftrightarrow n \ln 1{,}19 > \ln 10 \Leftrightarrow n > \underbrace{\frac{\ln 10}{\ln 1{,}19}}_{\simeq 13{,}24} \Rightarrow n \geq 14$$

$$u_n = 1\,700 \times 1{,}19^{n-7} > 5\,000 \Leftrightarrow 1{,}19^{n-7} > \frac{5\,000}{1\,700} = \frac{50}{17} \Leftrightarrow n-7 > \frac{\ln \frac{50}{17}}{\ln 1{,}19} \Leftrightarrow n > \underbrace{\frac{\ln \frac{50}{17}}{\ln 1{,}19} + 7}_{\simeq 13{,}20} \Rightarrow n \geq 14$$

Dans les deux cas, on obtient le même résultat : au 1er janvier 2020, le prix de l'once d'or aura dépassé 5 000$. C'est donc au cours de l'année 2019 que ce dépassement se sera produit.

Le prix de l'once d'or dépassera 5 000$ au cours de l'année 2019.

2) a. Dans l'énoncé, on précise que la recette *R* de l'entreprise est proportionnelle à la quantité *x* d'or contenu dans les articles. Ainsi, la courbe représentative de la fonction $x \mapsto R(x)$ est une droite (plus précisément une demi-droite puisque $x \geq 1$ et même un segment puisque *x* ne dépassera pas une certaine valeur). Seule la courbe C_1 correspond. Par ailleurs, l'augmentation du coût de production *C* en fonction de *x* est qualifiée de « très forte » (croissance dite « exponentielle »). La courbe C_2 correspond à une telle augmentation.

Les courbes associées aux fonctions de coût et de recette sont, respectivement, les courbes C_2 et C_1.

b. On dispose des éléments suivants :

- Représentations graphiques fournies des courbes C_1 et C_2.
- Eléments d'énoncé : « Les coûts de production augmentant très fortement… ».
- Le prix de vente peut être légitimement considéré comme d'autant plus élevé que l'on aura utilisé davantage d'or dans la fabrication des produits.

D'après ces éléments, on peut conjecturer :

Les fonctions *C* et *R* sont des fonctions strictement croissantes de la variable *x*.

3) a. Le bénéfice de l'entreprise est nul lorsque le coût de production est égal à la recette, c'est-à-dire, graphiquement, en tout point d'intersection des courbes C_1 et C_2. En effet, la valeur de l'ordonnée d'un tel point sera égale au coût de production (le point est vu comme point de C_2) et également à la recette (le point est vu comme point de C_1).

D'après le graphique proposé, les courbes C_1 et C_2 se coupent en un point. D'où :

Il existe une masse d'or α pour laquelle le bénéfice réalisé par l'entreprise est nul.

Notons I le point d'intersection des courbes C_1 et C_2. Son abscisse vaut α et son ordonnée vaut $R(\alpha)=C(\alpha)$. On en déduit ainsi :

La quantité α est solution de l'équation $R(x)=C(x)$.

b. D'après le graphique fourni, l'abscisse du point I est environ égale à 1,9. Pour tout x compris entre 1 et 1,9 la courbe C_1 est située au-dessus de la courbe C_2 et donc la recette est supérieure au coût : l'entreprise réalisera un bénéfice (strictement) positif. La situation est inversée lorsque x est strictement supérieur à 1,9 : l'entreprise réalisera alors un bénéfice (strictement) négatif.

L'entreprise réalise un bénéfice (strictement) positif
lorsque la masse d'or contenue dans les articles est comprise entre 10 et 19 grammes.

Partie B

1. On a : $\varphi(x) = C(x) - x = e^{x-1} - \frac{1}{2} - x = \frac{1}{e}e^x - x - \frac{1}{2} = e^x\left(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{2e^x}\right)$.

   Comme $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$, il vient immédiatement : $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{2e^x} = 0$.

   Par croissance comparée, on a aussi : $\lim_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0$.

   Ainsi : $\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{2e^x}\right) = \frac{1}{e} - 0 - 0 = \frac{1}{e}$ et, finalement (produit) :

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = \lim_{x\to+\infty}\left(e^x\left(\frac{1}{e} - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{2e^x}\right)\right) = +\infty$$

$$\lim_{x\to+\infty} \varphi(x) = +\infty$$

2. La fonction $x \mapsto e^{x-1} = \frac{1}{e} \times e^x$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ car la fonction exponentielle l'est. Il en va donc de même pour la fonction $x \mapsto e^{x-1} - \frac{1}{2}$ et pour la fonction $x \mapsto e^{x-1} - \frac{1}{2} - x$ (différence de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$).
   Celle-ci l'est donc à fortiori sur l'intervalle $[1\,;+\infty[$. Finalement, la fonction φ est dérivable sur $[1\,;+\infty[$ et pour tout réel x supérieur ou égal à 1, on a :

$$\varphi'(x) = e^{x-1} - 1$$

   Pour $x = 1$, on a : $\varphi'(x) = \varphi'(1) = e^{1-1} - 1 = e^0 - 1 = 0$.
   Par ailleurs :

$$x > 1 \Leftrightarrow x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^{x-1} > e^0 \Leftrightarrow e^{x-1} > 1 \Leftrightarrow e^{x-1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \varphi'(x) > 0$$

On déduit de ce qui précède :

La fonction φ est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

3. La fonction φ est continue sur l'intervalle $[1;+\infty[$ puisqu'elle y est dérivable. On vient de voir qu'elle y est strictement croissante.
   On a par ailleurs : $\varphi(0)=e^{0-1}-\frac{1}{2}-0=\frac{1}{e}-\frac{1}{2}<0$ (car $e>2$) et, d'après la question 1 de cette partie : $\lim\limits_{x\to+\infty}\varphi(x)=+\infty$.
   Comme $0\in\left[\frac{1}{e}-\frac{1}{2};+\infty\right[$, le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires nous permet de conclure que l'équation $\varphi(x)=C(x)-x=0$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1;+\infty[$. Ainsi :

L'équation $C(x)=x$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1;+\infty[$.

4. On a : $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)=e^{\frac{3}{2}-1}-\frac{1}{2}-\frac{3}{2}=e^{\frac{1}{2}}-2=\sqrt{e}-2<0$ (car $e<4$).
   Par ailleurs : $\varphi(2)=e^{2-1}-\frac{1}{2}-2=e^{1}-\frac{5}{2}=e-\frac{5}{2}>0$ (car $e\simeq 2,718$).
   On a donc, en tenant compte de $\varphi(\alpha)=0$: $\varphi\left(\frac{3}{2}\right)<\varphi(\alpha)<\varphi(2)$. Comme la fonction φ est strictement croissante sur l'intervalle $[1;+\infty[$, il vient finalement :

$\frac{3}{2}<\alpha<2$

Partie C

1. Pour tout réel *x* appartenant à l'intervalle $I=\left[\frac{3}{2};2\right]$, on a :

$$C(x)=x\Leftrightarrow e^{x-1}-\frac{1}{2}=x\Leftrightarrow e^{x-1}=x+\frac{1}{2}\Leftrightarrow x-1=\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)\Leftrightarrow x=\ln\left(x+\frac{1}{2}\right)+1\Leftrightarrow g(x)=x$$

Pour tout *x* dans $I=\left[\frac{3}{2};2\right]$: $C(x)=x\Leftrightarrow g(x)=x$.

2. a. La fonction $x \mapsto x+\frac{1}{2}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction affine. Elle l'est donc à fortiori sur l'intervalle $I=\left[\frac{3}{2}\,;2\right]$. Strictement croissante (car le coefficient de « x » est strictement positif), elle prend ses valeurs dans l'intervalle $J=\left[\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\,;2+\frac{1}{2}\right]=\left[2\,;\frac{5}{2}\right]\subset\mathbb{R}_+^*$. Or, la fonction logarithme népérien est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$. On en déduit finalement que la fonction $x\mapsto \ln\left(x+\frac{1}{2}\right)$, et donc la fonction g, sont également dérivables sur cet intervalle.

Pour tout réel x de $I=\left[\frac{3}{2}\,;2\right]$, il vient alors : $g'(x)=\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}$.

Pour tout réel x de $I=\left[\frac{3}{2}\,;2\right]$, on a $x+\frac{1}{2}\in J=\left[2\,;\frac{5}{2}\right]$. Ainsi, $g'(x)>0$ et on en conclut :

La fonction g est strictement croissante sur l'intervalle I.

D'après ce qui précède, on a : $\frac{3}{2}\le x\le 2 \Leftrightarrow g\left(\frac{3}{2}\right)\le g(x)\le g(2)$.

Or : $g\left(\frac{3}{2}\right)=\ln\left(\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\right)+1=\ln(2)+1>\frac{3}{2}$ (car $4>e\Leftrightarrow 2>\sqrt{e}\Leftrightarrow \ln(2)>\frac{1}{2}$).

Et : $g(2)=\ln\left(2+\frac{1}{2}\right)+1=\ln\left(\frac{5}{2}\right)+1<2$ (car $\frac{5}{2}<e\Leftrightarrow \ln\left(\frac{5}{2}\right)<1$).

On a donc, pour tout x dans I : $\frac{3}{2}\le x\le 2\Leftrightarrow g\left(\frac{3}{2}\right)\le g(x)\le g(2)\Rightarrow \frac{3}{2}\le g(x)\le 2$.

C'est-à-dire : $x\in I\Rightarrow g(x)\in I$.

$x\in I\Rightarrow g(x)\in I$

b. A la question précédente, on a vu que l'on avait, pour tout réel x de $I=\left[\frac{3}{2}\,;2\right]$:

$g'(x)=\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}$. On a alors : $\frac{3}{2}\le x\le 2\Leftrightarrow 2\le x+\frac{1}{2}\le\frac{5}{2}\Leftrightarrow \frac{2}{5}\le\dfrac{1}{x+\frac{1}{2}}\le\frac{1}{2}\Leftrightarrow\frac{2}{5}\le g'(x)\le\frac{1}{2}$.

Finalement :

Pour tout réel x de $I=\left[\frac{3}{2}\,;2\right]$, on a : $0\le g'(x)\le\frac{1}{2}$.

3. a. D'après l'énoncé, on a, pour tout couple de réels (x, y) de I : $|g(x)-g(y)| \leq \frac{1}{2}|x-y|$.

En fixant $y = \alpha$, il vient : pour tout réel x de $I = \left[\frac{3}{2}\,;2\right]$: $|g(x)-g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|$.

Mais on a : $C(\alpha) = \alpha$ et, pour tout réel x de $I = \left[\frac{3}{2}\,;2\right]$, $C(x) = x \Leftrightarrow g(x) = x$. On en déduit alors $g(\alpha) = \alpha$ et enfin :

$$\boxed{\text{Pour tout réel } x \text{ de } I = \left[\frac{3}{2}\,;2\right] : |g(x)-\alpha| \leq \frac{1}{2}|x-\alpha|.}$$

b. On a :

$$\begin{aligned} w_2 &= g(w_1) = g(g(w_0)) \\ &= \ln\left(g(w_0)+\frac{1}{2}\right)+1 \\ &= \ln\left(\ln\left(w_0+\frac{1}{2}\right)+1+\frac{1}{2}\right)+1 \\ &= \ln\left(\ln(2)+\frac{3}{2}\right)+1 \\ &\simeq 1,785 \end{aligned}$$

Puis :

$$\begin{aligned} w_3 &= g(w_2) \\ &= \ln\left(w_2+\frac{1}{2}\right)+1 \\ &= \ln\left(\ln\left(\ln(2)+\frac{3}{2}\right)+1+\frac{1}{2}\right)+1 \\ &= \ln\left(\ln\left(\ln(2)+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}\right)+1 \\ &\simeq 1,827 \end{aligned}$$

$$\boxed{w_2 = \ln\left(\ln(2)+\frac{3}{2}\right)+1 \simeq 1,785 \text{ et } w_3 = \ln\left(\ln\left(\ln(2)+\frac{3}{2}\right)+\frac{3}{2}\right)+1 \simeq 1,827 \text{ à } 10^{-3} \text{ près.}}$$

c. Nous allons établir le résultat demandé par récurrence.
Pour tout entier naturel n, on considère la proposition :

$$\mathscr{P}_n \text{ : « } |w_n-\alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \text{ »}$$

Initialisation

A la question 4 de la partie B, on a montré que l'on avait : $\frac{3}{2} < \alpha < 2$.

On a alors : $0 < \alpha - \frac{3}{2} < \frac{1}{2}$, c'est-à-dire : $0 < \alpha - w_0 < \frac{1}{2}$.

On en déduit : $0 < |\alpha - w_0| < \frac{1}{2}$ et donc : $|w_0 - \alpha| \leq \frac{1}{2}$.

La proposition $\mathscr{P}_0$ est donc vraie.

Hérédité

Supposons que la proposition $\mathscr{P}_n$ soit vraie pour un entier naturel n quelconque fixé.
Montrons alors que la proposition $\mathscr{P}_{n+1}$ est également vraie.

Comme $\mathscr{P}_n$ est vraie, on a : $|w_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

On veut montrer : $|w_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$. On s'intéresse donc à $|w_{n+1} - \alpha|$.

On a : $|w_{n+1} - \alpha| = |g(w_n) - g(\alpha)|$. Comme w_n et α sont dans I, on a, d'après l'énoncé de la question 3 : $|g(w_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|w_n - \alpha|$.

En utilisant l'hypothèse de récurrence, il vient :

$$|g(w_n) - g(\alpha)| \leq \frac{1}{2}|w_n - \alpha| \leq \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$$

Finalement : $|w_{n+1} - \alpha| = |g(w_n) - g(\alpha)| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$. Ainsi, la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vraie.

Conclusion

On déduit de ce qui précède que la propriété $\mathscr{P}_n$ est vraie pour tout entier naturel n.

Pour tout entier naturel n, on a : $|w_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

d. La suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de premier terme $\frac{1}{2}$ et de raison $\frac{1}{2}$.

Comme la raison appartient à $\left]-1\,;+1\right[$, on en déduit immédiatement que la suite $\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

D'après la question précédente, on a, pour tout entier naturel n : $0 \le |w_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$.

On déduit alors de ce qui précède, grâce au théorème des gendarmes : $\lim\limits_{n\to+\infty} |w_n - \alpha| = 0$ et, enfin : $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = \alpha$.

La suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers α.

4. D'après la question 3.c, nous avons, pour tout entier naturel n : $|w_n - \alpha| \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$,

c'est-à-dire : $-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \le w_n - \alpha \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$, soit encore : $-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + w_n \le \alpha \le \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + w_n$.

On obtient ainsi un encadrement du réel α d'amplitude $2\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n}$.

Si on souhaite que cette amplitude soit inférieure ou égale à 10^{-4}, il convient donc de choisir n tel que : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \le 10^{-4}$.

On a : $\left(\frac{1}{2}\right)^{n} \le 10^{-4} \Leftrightarrow n\ln\left(\frac{1}{2}\right) \le -4\ln(10) \Leftrightarrow -n\ln(2) \le -4\ln(10) \Leftrightarrow n \ge \frac{4\ln(10)}{\ln(2)} \simeq 13,3$.

Ainsi, en choisissant $n = 14$, on va obtenir un encadrement de α d'amplitude $\left(\frac{1}{2}\right)^{14} = \frac{1}{16\,384} < 10^{-4}$: $-\left(\frac{1}{2}\right)^{14+1} + w_{14} \le \alpha \le \left(\frac{1}{2}\right)^{14+1} + w_{14}$

On peut obtenir facilement les premiers termes de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à l'aide de la calculatrice. En donnant alors des valeurs approchées à 10^{-5} de $-\left(\frac{1}{2}\right)^{14+1} + w_{14}$ (par défaut) et de $\left(\frac{1}{2}\right)^{14+1} + w_{14}$ (par excès), on obtient l'encadrement :

$$1,857\,64 < \alpha < 1,857\,71$$

L'amplitude de cet encadrement vaut $0,000\,07 = 7.10^{-5} < 10^{-4}$.

Si on souhaite un encadrement dont l'amplitude vaut exactement 10^{-4}, il suffit d'élargir l'encadrement obtenu en retranchant à gauche et ajoutant à droite la moitié de $10^{-4}-7.10^{-5}$, soit $\frac{10^{-4}-7.10^{-5}}{2}=1,5.10^{-5}$:

$$1,857\,64-1,5.10^{-5}<\alpha<1,857\,71+1,5.10^{-5}$$

Soit, finalement : $1,857\,625<\alpha<1,857\,725$.

$$\boxed{1,857\,625<\alpha<1,857\,725}$$

Remarque : cet encadrement est en accord avec la valeur approchée lue sur le graphique (question 3.b de la partie A).

5. Dans la partie A, on a vu que les recettes de l'entreprise étaient proportionnelles à la quantité d'or contenue dans les produits. On peut donc écrire : $R(x)=k\,x$ où k est un réel. Etonnamment, la valeur de k n'est pas directement donnée. Cependant, deux éléments d'énoncé nous permettent de considérer que l'on a : $k=1$:

   - La courbe C_1 semble passer par le point de coordonnées $(1\,;1)$.
   - Dans la partie B, on s'intéresse à l'équation $C(x)=x$, à priori traduction « directe » de l'équation $C(x)=R(x)$ permettant de déterminer la quantité d'or α conduisant à un bénéfice nul.

   On part donc « naturellement » du principe que le réel α étudié dans les questions précédentes est la quantité d'or cherchée ici.

   La valeur demandée doit être donnée en grammes à 10^{-2} près. Or, la variable x désigne, dans ce qui précède, une quantité d'or en dizaines de grammes. On doit donc retenir une valeur approchée de α à 10^{-3} près. D'après l'encadrement obtenu à la question précédente, on a immédiatement : $\alpha\simeq 1,858$ à 10^{-3} près et on conclut finalement :

L'entreprise réalisera un bénéfice nul pour une quantité d'or incluse dans les articles égale à 18,58 grammes (valeur approchée à 10^{-2} près).

Vrai-Faux

Question 1. $\boxed{\textbf{FAUX}}$

On a : $v_2 = v_{1+1} = 1\times v_1 = v_1 = 1$ et $v_3 = v_{2+1} = 2\times v_2 = 2\times 1 = 2$.
A titre de complément : $v_4 = v_{3+1} = 3\times v_3 = 3\times 2 = 6\ldots$

La proposition est donc fausse.

Question 2. $\boxed{\textbf{FAUX}}$

La suite (u_n) est une suite arithmétique de raison 1 et de premier terme $u_0 = 1$. On a donc : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n+1$. On a donc, pour tout entier naturel n :

$$\begin{aligned} v_n &= u_0 + u_1 + \ldots + u_n \\ &= e^{u_0} + e^{u_1} + \ldots + e^{u_n} \\ &= e^1 + e^2 + \ldots + e^{n+1} \\ &= e\left(1 + e^1 + \ldots + e^n\right) \\ &= e\times\frac{1-e^{n+1}}{1-e} \end{aligned}$$

Or $e > 1$, donc : $\lim\limits_{n\to+\infty} e^n = +\infty$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(1-e^n\right) = -\infty$.

Comme $\dfrac{e}{1-e} < 0$, il vient finalement : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(e\times\dfrac{1-e^{n+1}}{1-e}\right) = +\infty$.

La proposition est donc fausse.

Question 3. $\boxed{\textbf{VRAI}}$

La fonction *g* est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ comme composée de la fonction $-f$ (dérivable sur $\mathbb{R}_+$ car *f* l'est) et de la fonction exponentielle (dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc sur $\mathbb{R}_+$). Pour tout *x* réel positif, on a alors : $g'(x) = -f'(x)\times e^{-f(x)}$. Comme $\forall x \in \mathbb{R}_+, e^{-f(x)} > 0$, on en déduit immédiatement que le signe de $g'(x)$ est exactement l'opposé de celui de $f'(x)$.
De fait, si la fonction *f* est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+$ alors la fonction *g* est strictement décroissante sur ce même intervalle.

La proposition est donc vraie.

Question 4. $\boxed{\textbf{FAUX}}$

Une augmentation de 5% équivaut à une multiplication du prix par 1,05.
La période considérée est de 20 ans. Le prix initial (en 2000), notons-le *P*, a donc été multiplié par $1,05^{20}$. On a donc l'égalité : $P \times 1,05^{20} = 150\,000$. On en tire immédiatement, en arrondissant à l'unité :

$$P = \frac{150\,000}{1,05^{20}} \simeq 56\,533$$

La proposition est donc fausse.

On peut (légitimement) se demander à quoi correspond la valeur fournie dans l'énoncé.
Elle est en fait obtenue si on commet l'erreur classique consistant à partir du « principe » qu'une augmentation de 5% équivaut, en remontant le temps, à une baisse de 5%. Il est très probable que certains candidats ont dû calculer le prix initial de la façon suivante : $150\,000 \times 0,95^{20}$. En arrondissant à l'unité, on obtient alors 53 772…

Question 5. $\boxed{\textbf{VRAI}}$

On pose classiquement $X = e^x$ et on résout alors l'équation $3X^2 + 2 = 12X$ dans $\mathbb{R}_+^*$.
On a : $3X^2 + 2 = 12X \Leftrightarrow 3X^2 - 12X + 2 = 0$.
Le discriminant associé vaut : $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 2 = 144 - 24 = 120$.
On a donc les deux racines :

$$X_1 = \frac{12 - \sqrt{120}}{2 \times 3} = \frac{12 - 2\sqrt{30}}{2 \times 3} = 2 - \frac{\sqrt{30}}{3} \simeq 0,174 \text{ et } X_2 = 2 + \frac{\sqrt{30}}{3} \simeq 3,826$$

L'équation initiale admet alors les deux racines :

$$x_1 = \ln X_1 = \ln\left(2 - \frac{\sqrt{30}}{3}\right) \simeq -1,747 \text{ et } x_2 = \ln X_2 = \ln\left(2 + \frac{\sqrt{30}}{3}\right) \simeq 1,342$$

La proposition est donc vraie.

Question 6. $\boxed{\textbf{VRAI}}$

Le repère considéré étant orthonormé, une équation de la droite (Δ) est de la forme $-4x + 3y + k = 0$ où *k* est une constante réelle. Pour déterminer *k*, on utilise le fait que le point $\mathrm{A}(4\,;1)$ appartient à (Δ). On a donc : $-4 \times 4 + 3 \times 1 + k = 0$, soit $k = 13$.
La droite (Δ) admet donc pour équation : $-4x + 3y + 13 = 0$.

Pour déterminer les coordonnées du point d'intersection des droites (d) et (Δ), on doit donc résoudre le système :

$$\begin{cases} 3x+4y+4=0 \\ -4x+3y+13=0 \end{cases}$$

On a :

$$\begin{cases} 3x+4y+4=0 \\ -4x+3y+13=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\times(3x+4y+4)=0 \\ 3\times(-4x+3y+13)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 12x+16y+16=0 \\ -12x+9y+39=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 25y+55=0 \\ x=-\dfrac{16y+16}{12} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{11}{5} \\ x=-\dfrac{4y+4}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{11}{5} \\ x=-\dfrac{4\times\left(-\dfrac{11}{5}\right)+4}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{11}{5} \\ x=-\dfrac{\dfrac{-44+20}{5}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{11}{5} \\ x=-\dfrac{\dfrac{-44+20}{5}}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-\dfrac{11}{5} \\ x=\dfrac{24}{15} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=\dfrac{8}{5} \\ y=-\dfrac{11}{5} \end{cases}$$

La proposition est donc vraie.

Question 7. $\boxed{\textbf{FAUX}}$

On peut faire « tourner l'algorithme proposé à la main » en utilisant le tableau suivant $N=10$ et $P=10\,000$) :

S	1	10	90	720	5 040	30 240
I	10	9	8	7	6	5
$S<P$?	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Non
$I>0$?	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui
$S<P$ et $I>0$?	Oui	Oui	Oui	Oui	Oui	Non

Dans la dernière exécution de la boucle, la variable reçoit donc la valeur 5. Ce sera la valeur finalement affichée.

La proposition est donc fausse.

Question 8. $\boxed{\textbf{VRAI}}$

La fonction *f* est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions dérivables sur cet intervalle (une fonction polynôme et la fonction exponentielle) et pour tout réel *x*, on a :

$$f'(x) = (2x+1)e^x + \left(x^2+x+1\right)e^x = \left(x^2+3x+2\right)e^x$$

Ainsi, une équation de la tangente à la courbe représentative de la fonction *f* au point d'abscisse 1 est :

$$\begin{aligned} y &= f'(1)\times(x-1)+f(1) \\ &= \left(1^2+3\times1+2\right)e^1\times(x-1)+\left(1^2+1+1\right)e^1 \\ &= 6e\times(x-1)+3e \\ &= 6e\times\left(x-1+\frac{1}{2}\right) \\ &= 6e\times\left(x-\frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

Cette droite coupe l'axe des abscisse en un point dont l'ordonnée est donc nulle. Or, on a immédiatement : $6e\times\left(x-\frac{1}{2}\right)=0 \Leftrightarrow x-\frac{1}{2}=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

La proposition est donc vraie.

Question 9. $\boxed{\textbf{VRAI}}$

Notons X la variable aléatoire correspondant au nombre de gélules non conformes dans un sachet donné. On cherche $P(\mathrm{X}=0 \text{ ou } \mathrm{X}=1)=P(\mathrm{X}=0)+P(\mathrm{X}=1)$.

D'après l'énoncé, la probabilité qu'une gélule ait une masse non conforme est égale à 0,03 (3%).

La variable aléatoire X suit donc une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=0,03$.

Il vient alors :

$$\begin{aligned} P(\mathrm{X}=0)+P(\mathrm{X}=1) &= \underbrace{\binom{10}{0}}_{=1}\times\underbrace{0,03^0}_{=1}\times0,97^{10}+\binom{10}{1}\times0,03^1\times0,97^9 \\ &= 0,97^9\underbrace{(0,97+10\times0,03)}_{=1,27} \\ &= 1,27\times0,97^9 \\ &\simeq 0,965 > 0,96 \end{aligned}$$

La proposition est donc vraie.

Question 10. $\boxed{\textbf{FAUX}}$

Pour chaque loterie, nous allons calculer l'espérance de gain.
Dans chacun des deux cas, nous supposons que nous sommes dans une situation d'équiprobabilité. En notant respectivement G_R et G_A les variables aléatoires correspondant aux gains (bruts) des tombolas de Raphaël et Aurélien respectivement, il vient :

$$\mathrm{E}(G_R) = \frac{1}{100} \times (1 \times 250 + 4 \times 50 + 25 \times 2) = \frac{500}{100} = 5$$
$$\mathrm{E}(G_A) = \frac{1}{100} \times (5 \times 20 + 10 \times 15 + 15 \times 10 + 25 \times 5) = \frac{525}{100} = 5,25$$

Remarque : pour obtenir les espérances des gains nets, il suffit de retrancher 1 à chacune des deux valeurs obtenues. Ceci ne change rien à la comparaison que nous effectuons ci-après.

Ainsi, il est plus intéressant de jouer à la tombola d'Aurélien.

La proposition est donc fausse.

Ceci dit, de telles tombolas sont peu réalistes car il s'agit de jeux très favorables aux joueurs ! En règle générale, de tels jeux sont d'espérance nulle (i.e. l'espérance du gain net est nulle) voire négatives.